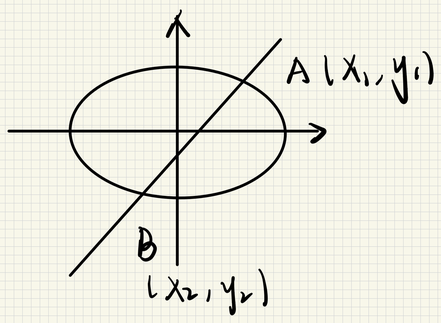
弦长公式



$$|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2\left[1+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2\right]}$$

$$= \sqrt{(1+k^2)}\,|x_2-x_1| \quad \text{(一般不是弦长时用)}$$

$$= \sqrt{(1+k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]} \quad \text{(韦达定理)}$$

$$= \sqrt{(1+k^2)\left[\left(-\frac{B}{A}\right)^2-4\cdot\frac{C}{A}\right]}$$

$$= \sqrt{(1+k^2)\,\frac{B^2-4AC}{A^2}} = \sqrt{(1+k^2)\,\frac{\Delta x}{A^2}} \rightarrow \text{关于 } x \text{ 的方程}$$

$$= (y_2-y_1)^2\left[1+\left(\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\right)^2\right]$$

$$= \sqrt{1+t^2}\,|y_2-y_1| \qquad t=\frac{1}{k}$$

$$= \sqrt{(1+t^2)\left[(y_1+y_2)-4y_1y_2\right]}$$

$$= \sqrt{(1+t^2)\left[\left(-\frac{B}{A}\right)^2-4\cdot\frac{C}{A}\right]}$$

$$= \sqrt{(1+t^2)\cdot\frac{\Delta y}{A^2}}$$

第9讲：圆锥曲线解答题之弦长问题

题型一：弦长公式

1. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，过椭圆右焦点 F_2 作两条互相垂直的弦 AB 与 CD，当直线 AB 的斜率为0时，$|AB|+|CD|=7$.

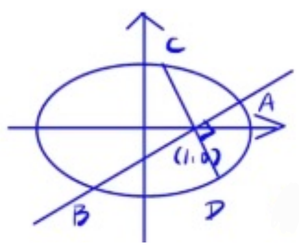
(1) 求椭圆的方程；

(2) 求 $|AB|+|CD|$ 的取值范围；

(3) 求四边形 $ACBD$ 的面积的范围.

(1) ① 若 AB，CD 一个水平，一个竖直.

$|AB|+|CD|=7$.



② 设 AB：$x=ty+1$

CD：$x=-\frac{1}{t}y+1$

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x-ty+1=0\end{cases}$ $(4+3t^2)y^2+6ty-9=0$.

$y_1+y_2=\frac{-6t}{4+3t^2}$ $y_1\cdot y_2=\frac{-9(1-t^2)}{4+3t^2}$

$\Delta y=\frac{4\cdot 6^2t^2}{(4+3t^2)^2}+\frac{4\cdot 9(1-t^2)}{4+3t^2}=\frac{4^2\cdot 3^2(t^2+1)}{(4+3t^2)^2}$

$|AB|=\sqrt{(1+t^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{(1+t^2)\frac{4^2\cdot 3^2(t^2+1)}{(4+3t^2)^2}}=\frac{12(t^2+1)}{4+3t^2}$

正设：$y=k(x-1)$. 好指当

反设：$x=ty+1$.

同理，$|CD|=\frac{12[(-\frac{1}{t})^2+1]}{4+3\cdot(-\frac{1}{t})^2}=\frac{12(1+t^2)}{4t^2+3}$.

$|AB|+|CD|=\frac{12(t^2+1)}{4+3t^2}+\frac{12(t^2+1)}{4t^2+3}$

$=12(t^2+1)\frac{7t^2+7}{(4+3t^2)(4t^2+3)}$

$=\frac{84(t^2+1)^2}{(4+3t^2)(4t^2+3)+7t^2+7}\geq\frac{84(t^2+1)^2}{\frac{1}{4}(7t^2+7)^2}=\frac{48}{7}$

令 $u=t^2+1$ 则 $u\in(1,+\infty)$

$|AB|+|CD|=\frac{84u^2}{(3u+1)(4u-1)}=\frac{84u^2}{12u^2+u-1}=\frac{84}{12+\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}}$

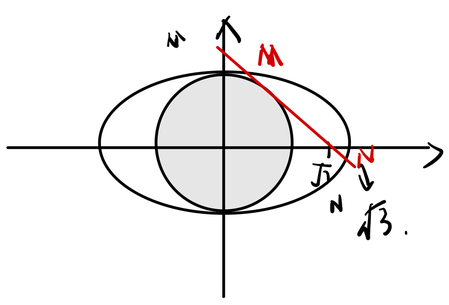
又令 $x=\frac{1}{u}$. 解二次函数.

2. (2021·新高考Ⅱ) 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点为 $F(\sqrt{2},0)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(Ⅰ) 求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ) 设 M，N 是椭圆 C 上的两点，直线 MN 与曲线 $x^2+y^2=b^2(x>0)$ 相切. 证明：M，N，F 三点共线的充要条件是 $|MN|=\sqrt{3}$.

先证充分性



(1) $c=\sqrt{2}$

$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}$

C：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ $b=1$.

$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-ty-m=0\end{cases}$

再证必要性

相切：$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t^2}}=1$. $\Rightarrow t=\pm 1$.

不妨设 $t=1$. 则 MN $x=y+\sqrt{2}$.

$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1\\ x=y+\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow(y+\sqrt{2})^2+3y^2=3$. $4y^2+\sqrt{2}y=0$. $y_1+y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. $y_1y_2=-\frac{1}{4}$.

(Ⅱ) $P(\cos\theta,\sin\theta)$

充分性：已知 $|MN|=\sqrt{3}$ 证 MN 过定点 $(\sqrt{2},0)$

若 MN 水平，不符合题意.

若 MN 不水平 设 $x=ty+m$.

即 $x-ty-m=0$.

$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+t^2}}=1\Rightarrow m^2=1+t^2$

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1\\ x-ty+m=0\end{cases}$ $\Delta=4\times 3(3+t^2-m^2)=12(3+t^2-m^2)$

$y_1+y_2=\frac{-2tm}{3+t^2}$ $y_1y_2=\frac{m^2-3}{3+t^2}$

$|MN|=\sqrt{(1+t^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$

$=\sqrt{(1+t^2)\frac{12(3+t^2-m^2)}{(3+t^2)^2}}=\sqrt{3}$

若 $F(\sqrt{2},0)$ 在 MN 上

$\Rightarrow m=\sqrt{2}$

$\frac{(1+t^2)^2}{(3+t^2)^2}=\frac{1}{4}$

$\frac{1+t^2}{3+t^2}=\frac{1}{2}$

$2+2t^2=3+t^2$

$t^2=1$.

$t=1$ $x=\pm y+\sqrt{2}$. 为 M，N，F 三点共

3. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过左焦点 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点（A，B 不在 x 轴上），$\triangle ABF_2$ 的周长为 $8\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若点 P 在椭圆 C 上，且 $OP\perp AB$（O 为坐标原点），求 $\dfrac{|OP|^2}{|AB|^2}$ 的取值范围.

(1) 若 AB 水平时，则 $|AB|=2A=4\sqrt{2}$

$|OP|=b=2$

$\dfrac{|OP|^2}{|AB|^2}=\dfrac{1}{8}$

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ x-ty+2=0\end{cases}$ ⇝

$|AB|=(1+t^2)\cdots$

$=\dfrac{4\sqrt{2}(t^2+1)}{t^2+2}$

$OP^2=\dfrac{8(t^2+1)}{1+2t^2}$

令 $u=t^2+2$.

$\dfrac{OP^2}{AB^2}=\dfrac{8(t^2+1)}{1+2t^2}\cdot\dfrac{(t^2+2)^2}{(4\sqrt{2}(t^2+1))^2}=\dfrac{u^2}{8u^2-20u+12}$

$=\dfrac{1}{8-\frac{20}{u}+\frac{12}{u^2}}$

4. (2016 全国 II 理 20) 已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A 是 E 的左顶点，斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A，M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$.

(1) 当 $t=4$，$|AM|=|AN|$ 时，求 ΔAMN 的面积；

(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时，求 k 的取值范围.

(1)

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 & \Rightarrow\quad 3x^2+4(x+2)^2=12\\ y=x+2 & \Rightarrow\quad 7x^2+16x+4=0\end{cases}$

$x_1=-2\quad x_2=-\dfrac{2}{7}$

$S=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot h=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{24}{7}\times\dfrac{12}{7}=\dfrac{144}{49}$.

高中课程资料微信：NSJ2026

5. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 $F(1,0)$，短轴的端点分别为 B_1,B_2，且 $\overrightarrow{FB_1}\cdot\overrightarrow{FB_2}=-a$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过点 F 且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 交椭圆于 M,N 两点，弦 MN 的垂直平分线与 x 轴相交于点 D，弦 MN 的中点为 P，求 $\dfrac{|DP|}{|MN|}$ 的取值范围.

6. (2023·新高考Ⅰ) 在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W.

(1) 求 W 的方程；

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

高中课程资料微信：NSJ2026

题型二：弦长公式的本质

7. 过椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点 F 作弦 AB，证明：$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}$ 为定值.

8. (2016 四川理 20) 已知椭圆 E 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三个顶点，直线 $l:y=-x+3$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T.

(1) 求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标；

(2) 设 O 是坐标原点，直线 l' 平行于 OT，与椭圆 E 交于不同的两点 A、B，且与直线 l 交于点 P. 证明：存在常数 λ，使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$，并求 λ 的值.

高中课程资料微信：NST2026

9. （2023 届四省联考）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 $A(4\sqrt{2},3)$，且焦距为 10.

(1) 求 C 的方程；

(2) 已知点 $B(4\sqrt{2},-3),D(2\sqrt{2},0),E$ 为线段 AB 上一点，且直线 DE 交 C 于 G,H 两点．证明：$\dfrac{|GD|}{|GE|}=\dfrac{|HD|}{|HE|}$.

10. (2021 新高考Ⅰ卷) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$，$F_2(\sqrt{17},0)$，点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$．记 M 的轨迹为 C.

(1) 求 C 的方程；

(2) 设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A,B 两点和 P,Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

高中课程资料微信 · NSJ2026



课堂总结

高中课程资料微信：NSJ2026

作业

1. 已知抛物线 $C:y^2=4x$，若过点 $M(2,0)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 P,Q 两点，求证：$\dfrac{1}{|PM|^2}+\dfrac{1}{|QM|^2}$

高中课程资料微信：NSJ2026